0001910099808999

大阪歯科大学

2012年 歯学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ xy 平面において，不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ の表す領域を D_1 とし，整数 k に対して連立不等式

$$\begin{cases} y \leqq 2x+k+2 \\ y \geqq 2x+k-5 \end{cases}$$

の表す領域を D_2 とする．

(1) 円 $x^2+y^2=1$ の接線で，傾きが2のものをすべて求めよ．

(2) 領域 D_1 が領域 D_2 に含まれるような k をすべて求めよ．

(1) 接点を (x_0, y_0) とすると，接線は，$x_0x+y_0y=1$ …(*)

この傾きが 2 であるから，$-\dfrac{x_0}{y_0}=2$ $\therefore$ $y_0=-\dfrac{1}{2}x_0$ …①

また，接点は円上にあるので，$x_0^2+y_0^2=1$ …②

①を②に代入して方程式を解くと，$(x_0, y_0)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

よって (*) より，$\underline{y=2x+\sqrt{5},\ y=2x-\sqrt{5}}$ //

(2) 右の図より，

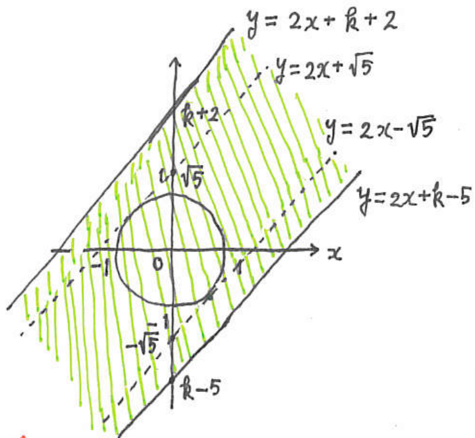
$D_1 \subset D_2 \iff k+2 \geqq \sqrt{5}$ かつ $k-5 \leqq -\sqrt{5}$

$\iff k \geqq \sqrt{5}-2$ かつ $k \leqq 5-\sqrt{5}$

$\iff \sqrt{5}-2 \leqq k \leqq 5-\sqrt{5}$

$2<\sqrt{5}<3$ と，k は整数であることから

$\underline{k=1, 2}$ //



(1)で求めた2本の接線を D_2 が含む