2016年 教育・薬学部 第3問

1枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 関数

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

の増減を調べ，y のとり得る値の範囲を求めよ．また，この関数の逆関数を求めよ．

(2) 定積分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx$$

について，I_1，I_2，I_3 を求めよ．

(3) 関数

$$f(x) = \frac{1 + \log x}{x} \quad (x > 0)$$

がある．曲線 $C : y = f(x)$ の変曲点を $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ とする．曲線 C と直線 $x = a$，および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $y = \dfrac{(e^x + e^{-x}) - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$= 1 - \dfrac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\therefore y' = \dfrac{2e^{-x}(e^x + e^{-x}) - 2e^{-x}(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \dfrac{4e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$

> 0

また，$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty}\left(1 - \frac{2}{e^{2x}+1}\right) = -1$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty}\left(1 - \frac{2}{e^{2x}+1}\right) = 1$

$y' > 0$ より，y は単調増加なので，$\underline{-1 < y < 1}$ //

$y = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より，$e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ $\quad \therefore x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$

$\therefore$ 逆関数は，$\underline{y = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)}$ //

0002293636077999

長崎大学

2016年 教育・薬学部 第3問　2枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 関数

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

の増減を調べ，y のとり得る値の範囲を求めよ．また，この関数の逆関数を求めよ．

(2) 定積分

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$$

について，I_1，I_2，I_3 を求めよ．

(3) 関数

$$f(x)=\frac{1+\log x}{x}\quad (x>0)$$

がある．曲線 $C: y=f(x)$ の変曲点を $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ とする．曲線 C と直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(2)
$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\&=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\underline{\frac{1}{2}\log 2}\ /\!/\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\&=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\underline{1-\frac{\pi}{4}}\ /\!/\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_3&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot\tan^2 x\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\cdot(\tan x)'\,dx-I_1\\&=\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\log 2\\&=\underline{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2}\ /\!/\end{aligned}$$

長崎大学

2016 年 教育・薬学部 第 3 問

3枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 関数

$$y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

の増減を調べ，y のとり得る値の範囲を求めよ．また，この関数の逆関数を求めよ．

(2) 定積分

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$$

について，I_1，I_2，I_3 を求めよ．

(3) 関数

$$f(x)=\frac{1+\log x}{x}\quad(x>0)$$

がある．曲線 $C: y=f(x)$ の変曲点を $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ とする．曲線 C と直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\log x)}{x^2}$

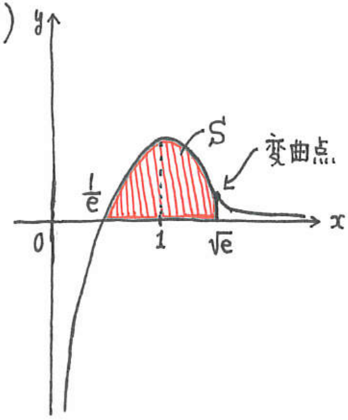
$=-\dfrac{\log x}{x^2}$

$f''(x)=-\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\log x\cdot 2x}{x^4}$

$=\dfrac{2\log x-1}{x^3}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$(-\infty)$	↗	1	↘	$\frac{3}{2\sqrt{e}}$	↘

変曲点は $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)$



$f'(x)=0$ となるのは $x=1$，$f''(x)=0$ となるのは．$x=\sqrt{e}$

$f(x)=0$ となるのは．$x=\dfrac{1}{e}$

$\therefore S=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}} f(x)\,dx$

$=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}}(1+\log x)'(1+\log x)\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}(1+\log x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=\dfrac{9}{8}$ //