0001837632618999

大分大学

2014年 医学部 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

2 数列の和について次の一連の問いに答えなさい．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ を示しなさい．

(2) 多項式 $(k+1)^3 - k^3$ の展開を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示しなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示しなさい．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めなさい．結果は因数分解すること．

(1) 数学的帰納法で示す．（展開を利用して示してもよい）

(i) $n=1$ のとき．

(左辺) = (右辺) = 1 となり成り立つ

(ii) $n=m$ のとき成り立つと仮定すると．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k = \frac{1}{2}m(m+1)$ 両辺に $m+1$ を加えて．$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} k = \frac{1}{2}m(m+1) + m+1$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$

∴ $n=m+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) より自然数 n について与式は成り立つ ■

(2) $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

よって
$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3\right) - \sum_{k=1}^{n}k - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}1$$
$$= \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3 - 1\right\} - \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{3}n$$
$$= \frac{1}{3}(n^3+3n^2+3n) - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$
$$= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad ■$$

(3) 数学的帰納法で示す．（展開を利用して示してもよい）

(i) $n=1$ のとき．(左辺) = (右辺) = 1 となり成り立つ

(ii) $n=m$ のとき成り立つと仮定すると．$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^3 = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2$

両辺に $(m+1)^3$ を加えて．$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} k^3 = \frac{1}{4}m^2(m+1)^2 + (m+1)^3 = \frac{1}{4}(m+1)^2(m+2)^2$

∴ $n=m+1$ のときも成り立つ

(i), (ii) より．自然数 n に対して与式が成り立つ ■

2014 年 医学部 第 2 問　2枚目/2枚.

数理 石井K

2　数列の和について次の一連の問いに答えなさい．

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ を示しなさい．

(2) 多項式 $(k+1)^3 - k^3$ の展開を利用して $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示しなさい．

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示しなさい．

(4) $\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めなさい．結果は因数分解すること．

(4) $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$ より.

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^5 - k^5\right\} = 5\sum_{k=1}^{n}k^4 + 10\sum_{k=1}^{n}k^3 + 10\sum_{k=1}^{n}k^2 + 5\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}k^4 = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)^5 - k^5\right\} - 2\sum_{k=1}^{n}k^3 - 2\sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k - \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$= \frac{1}{5}\left\{(n+1)^5 - 1\right\} - 2\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{5}n$$

$$= \frac{1}{5}(n+1)^5 - \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{5}(n+1)$$

$$= \frac{1}{30}(n+1)\left\{6(n+1)^4 - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\right\}$$

$$= \frac{1}{30}(n+1)\left\{6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 15n^2 - 20n^2 - 10n - 15n - 6\right\}$$

$$= \frac{1}{30}(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n)$$

$$= \underline{\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}\ //$$