0002012637897999

大分大学

2015年 経済学部 第3問

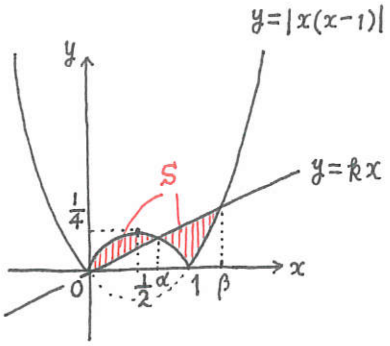
数理 石井K

$\boxed{3}$ kを実数とする．関数 $y=|x(x-1)|$ のグラフと直線 $y=kx$ が異なる3点を共有している．これらで囲まれた2つの部分の面積の和を S とする．

(1) kの値の範囲を求めなさい．

(2) Sをkの式で表しなさい．

(3) Sが最小になるときのkの値を求めなさい．



(1) $0 \leqq x \leqq 1$ において $x(x-1) \leqq 0$，

$x<0,\ 1<x$ において $x(x-1)>0$

$\therefore\ y=|x(x-1)|$ のグラフは右のようになる

よって異なる3点で交わる $\Longleftrightarrow$ $k>0$ かつ $y=-x(x-1)$ と $y=kx$ の交点で原点以外のものの x座標をαとすると，$0<\alpha<1$ をみたす

$-x(x-1)-kx=0$ より，$x(x-1+k)=0 \quad \therefore\ \alpha=1-k$

$\therefore\ k>0$ かつ $0<1-k<1$ より，$\underline{0<k<1}$ //

(2) $y=x(x-1)$ と $y=kx$ の交点で原点以外のもののx座標をβとすると．

$x(x-1)-kx=0$ より $x(x-k-1)=0 \quad \therefore\ \beta=1+k$

$$\therefore\ S=\int_0^{\alpha} -x(x-1)-kx\,dx+\int_{\alpha}^{1} kx-\{-x(x-1)\}\,dx+\int_1^{\beta} kx-x(x-1)\,dx$$

$$=-\int_0^{1-k}\{x-(1-k)\}x\,dx+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{k-1}{2}x^2\right]_{1-k}^{1}+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{k+1}{2}x^2\right]_1^{1+k}$$

$$=\frac{1}{6}(1-k)^3+\frac{1}{3}+\frac{k-1}{2}-\frac{1}{3}(1-k)^3+\frac{1}{2}(1-k)^3-\frac{1}{3}(1+k)^3+\frac{1}{2}(1+k)^3+\frac{1}{3}-\frac{k+1}{2}$$

$$=\underline{-\frac{1}{6}k^3+\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}}\ //$$

(3) $S'(k)=-\frac{1}{2}k^2+3k-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}(k^2-6k+1)$

k	(0)	$\cdots$	$3-2\sqrt{2}$	$\cdots$	(1)
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘		↗	

$\therefore\ S'(k)=0$ となるのは，$0<k<1$ より $k=3-2\sqrt{2}$

右の増減表より，Sが最小になるのは，$\underline{k=3-2\sqrt{2}}$ //