大分大学

2015 年 工学部 第 2 問

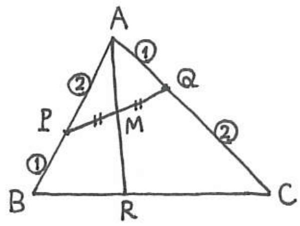
数理 石井K

$\boxed{2}$ △ABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を P，辺 AC を 1 : 2 に内分する点を Q とし，辺 BC 上に点 R があるとする．

(1) 線分 PQ の中点を M とし，点 A，M，R が一直線上にあるとき，BR : RC を求めなさい．

(2) △ABC の重心 G と △PRQ の重心 H が一致するとき，BR : RC を求めなさい．

(3) 直線 AR，BQ，CP が一点で交わるとき，BR : RC を求めなさい．



(1) $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ より．

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ})$

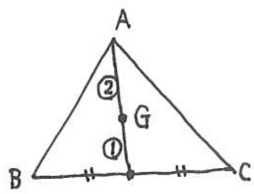
$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

点 A，M，R が一直線上にあるとき．$\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AM}$（$k$：実数）と表せるので

$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}k\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}k\overrightarrow{AC}$

点 R は辺 BC 上の点より，$\frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = 1$　　$\therefore k = 2$

$\therefore \overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ となり，BR : RC = 1 : 2 //



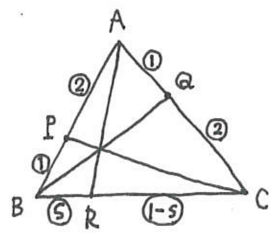
(2) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ …①

BR : RC = $s : 1-s$ $(0 < s < 1)$ とおくと，

$\overrightarrow{AR} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}) = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{5}{3} - s\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{3} + s\right)\overrightarrow{AC}\right\}$ …②

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AH}$ と ①，② より．$s = \frac{2}{3}$　　∴ BR : RC = 2 : 1 //



(3) BR : RC = $s : 1-s$ $(0 < s < 1)$ とおくと．

チェバの定理より．

$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$

$\therefore \frac{2}{1} \cdot \frac{s}{1-s} \cdot \frac{2}{1} = 1$　　$\therefore s = \frac{1}{5}$

ベクトルを使っても解けるが
チェバの定理の方が速い！

∴ BR : RC = 1 : 4 //