0002266813377999

大分大学

2016年 経済学部 第2問

$\boxed{2}$ aを0でない実数とする．2つの放物線$y=x^2$，$y=-x^2+2ax+\dfrac{1}{2a^2}$がある．

(1) 2つの放物線は異なる2点で交わることを示しなさい．

(2) 2つの放物線の交点のx座標をα，β $(\alpha<\beta)$とするとき，$\beta-\alpha$をaの式で表しなさい．

(3) 2つの放物線で囲まれた部分の面積Sをaの式で表しなさい．

(4) (3)で定めた面積Sの最小値を求めなさい．

(1) $x^2-\left(-x^2+2ax+\frac{1}{2a^2}\right)=0 \iff 2x^2-2ax-\frac{1}{2a^2}=0 \quad \cdots①$

の判別式をDとすると，

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2a^2}\right)$$
$$=a^2+\frac{1}{a^2}$$
$$>0 \quad (\because a\neq 0 \text{ であるから})$$

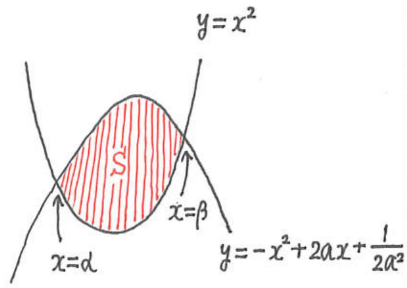
∴ 2つの放物線は異なる2点で交わる ■

(2) $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$は方程式①の解であるから，解の公式より，

$$\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}}{2},\quad \beta=\frac{a+\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}}{2} \qquad \therefore\ \underline{\beta-\alpha=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}}\,/\!/$$

解と係数の関係を使って$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$として求めてもよい．

(3) 右の図より，



$$S=\int_\alpha^\beta -x^2+2ax+\frac{1}{2a^2}-x^2\,dx$$
$$=-2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$\frac{1}{6}$公式

$$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(\beta-\alpha)^3$$
$$=\underline{\frac{1}{3}\cdot\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\,/\!/$$

(4) $a\neq 0$より，$a^2>0$，$\frac{1}{a^2}>0$

∴ 相加・相乗平均の関係より，$a^2+\frac{1}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=2$

等号成立は，$a^2=\frac{1}{a^2}$ すなわち，$a=\pm 1$のとき．

∴ (3)より，Sの最小値は，$\underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}\ (a=\pm 1 \text{のとき})}\,/\!/$

数理 石井K