大分大学

2016年 経済学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 初項3の数列 $\{a_n\}$ がある．$b_n = a_{n+1} - 3a_n$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は初項6，公比3の等比数列である．

(1) $c_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とするとき，$c_{n+1} - c_n$ を求めなさい．

(2) a_n を n の式で表しなさい．

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とするとき，S_n を n の式で表しなさい．

(1) $b_n = 6 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n$ より，

$$a_{n+1} - 3a_n = 2 \cdot 3^n$$

両辺を 3^{n+1} で割って，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \dfrac{a_n}{3^n} = \dfrac{2}{3}$

$$\therefore \underline{c_{n+1} - c_n = \frac{2}{3}} \text{〃}$$

(2) (1)より，$\{c_n\}$ は．初項 $c_1 = \dfrac{a_1}{3^1} = 1$，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列なので

$$c_n = 1 + \frac{2}{3}(n-1)$$

$$\therefore c_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{2}{3}n + \frac{1}{3} = \frac{a_n}{3^n} \qquad \therefore \underline{a_n = 3^{n-1} \cdot (2n+1)} \text{〃}$$

(3)
$$S_n = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 9 \cdot 7 + 27 \cdot 9 + \cdots + 3^{n-1} \cdot (2n+1) \quad \cdots ①$$

$$3S_n = \quad 3 \cdot 3 + 9 \cdot 5 + 27 \cdot 7 + \cdots + 3^{n-1} \cdot (2n-1) + 3^n(2n+1) \cdots ②$$

①−②より，

$$-2S_n = 3 + \underbrace{3 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 27 \cdot 2 + \cdots + 3^{n-1} \cdot 2}_{\text{初項6，公比3の等比数列の和}} - 3^n(2n+1)$$

$$= 3 + \frac{6(1-3^{n-1})}{1-3} - 3^n(2n+1)$$

$$= -2n \cdot 3^n$$

よって，$\underline{S_n = n \cdot 3^n}$〃