2017年 経済学部 第2問　　1枚目 / 2　　増田

2 $0 \leqq t \leqq 1$ とし，関数 $f(x) = x^2 - 4|x-1|$ に対して，

$$S(t) = \int_t^{2t} f(x)\,dx$$

とする．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかきなさい．
(2) $S(t)$ を求めなさい．
(3) $S(t)$ の最大値と最小値を求めなさい．

(1) $|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geqq 1 \text{ のとき}) \\ -(x-1) & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

$x \geqq 1$ のとき

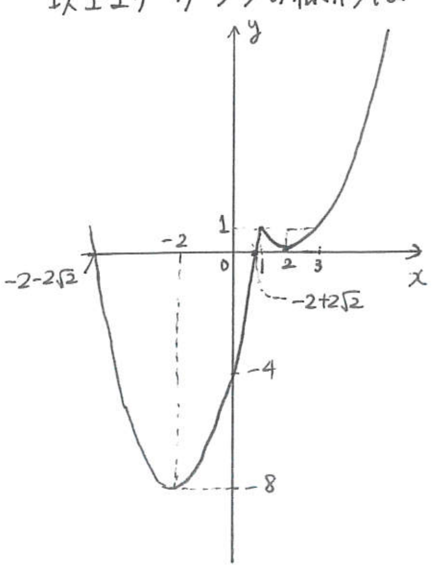
$f(x) = x^2 - 4(x-1)$
$= x^2 - 4x + 4$
$= (x-2)^2$

$x < 1$ のとき

$f(x) = x^2 + 4(x-1)$
$= x^2 + 4x - 4$
$= (x+2)^2 - 8$

$f(1) = 1$
$f(0) = -4$

以上より グラフの概形は



x軸との交点は

$x^2 + 4x - 4 = 0$
$x = -2 \pm \sqrt{4+4}$
$= -2 \pm 2\sqrt{2}$

(2) 積分範囲が 1以上も含まれるかどうかで場合分け

$0 \leqq t < \frac{1}{2}$ のとき、$2t < 1$ であるので、積分範囲は 1より小さい

$S(t) = \int_t^{2t} \{x^2 + 4x - 4\}\,dx$
$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x\right]_t^{2t}$
$= \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t$

$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき、積分範囲は 1以上も含まれる.

$S(t) = \int_t^1 (x^2 + 4x - 4)\,dx$
$+ \int_1^{2t} (x^2 - 4x + 4)\,dx$
$= \frac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4$

まとめると、

$0 \leqq t < \frac{1}{2}$ のとき

$S(t) = \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t$

$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき

$S(t) = \frac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4$

2017年 経済学部 第2問　　2枚目 / 2　　増田

2　$0 \leqq t \leqq 1$ とし，関数 $f(x) = x^2 - 4|x-1|$ に対して，

$$S(t) = \int_t^{2t} f(x)\,dx$$

とする．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかきなさい．

(2) $S(t)$ を求めなさい．

(3) $S(t)$ の最大値と最小値を求めなさい．

(3) $0 \leqq t < \frac{1}{2}$ のとき

$S_1(t) = \frac{7}{3}t^3 + 6t^2 - 4t$ とおく。

$S_1'(t) = 7t^2 + 12t - 4$

$= (t+2)(7t-2)$

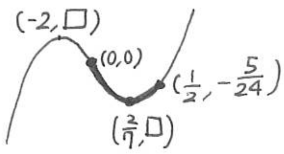
$S_1'(t) = 0$ となるのは

$t = -2, \frac{2}{7}$

また、$S_1(0) = 0$

$S_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$

グラフの概形は



$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき

$S_2(t) = \frac{7}{3}t^3 - 10t^2 + 12t - 4$ とおく。

$S_2'(t) = 7t^2 - 20t + 12$

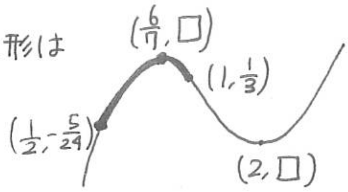
$= (t-2)(7t-6)$

$S_2'(t) = 0$ となるのは　$t = \frac{6}{7}, 2$

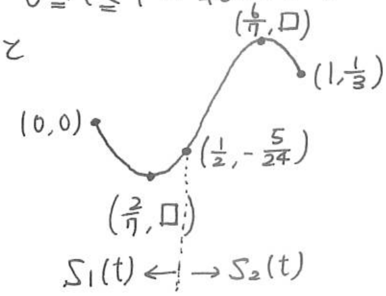
また、$S_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$

$S_2(1) = \frac{1}{3}$

グラフの概形は



以上より $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲でグラフをつなげると



最大値は　$S_2\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{20}{49}$ //

最小値は　$S_1\left(\frac{2}{7}\right) = -\frac{88}{147}$ //