大分大学

2017年 理工学部 第2問

増田

$\boxed{2}$ a, bを1より大きい定数とし，$\log_{ab} x + \log_{ab} y = 2$とする．

(1) xyをa, bの式で表しなさい．

(2) $ax + by$の最小値をa, bの式で表しなさい．

(3) $(ax-1)^2 + (by-1)^2$の最小値をa, bの式で表しなさい．

(1) $\log_{ab} x + \log_{ab} y$

$= \log_{ab}(xy) = 2$

$\underline{xy = (ab)^2 = a^2b^2}$ //

(2) 真数条件より $x>0$, $y>0$

$xy = a^2b^2$ より　$y = \dfrac{a^2b^2}{x}$　$(x \neq 0)$

$ax + by = ax + b\dfrac{a^2b^2}{x}$ …①

式①の各項は、$a>1$, $b>1$ と $x>0$, $y>0$ より正の値だから、相加・相乗平均を用いて

$$ax + \frac{a^2b^3}{x} \geqq \underbrace{2\sqrt{ax \times \frac{a^2b^3}{x}}}_{=\,2ab\sqrt{ab}}$$

$ax+by$ は、$ax = \dfrac{a^2b^3}{x}$ つまり $x = b\sqrt{ab}$, $y = a\sqrt{ab}$

のとき 最小値 $\underline{2ab\sqrt{ab}}$ // をとる。

(3) $(ax-1)^2 + (by-1)^2$

$= (ax+by)^2 - 2(ax+by) - 2abxy + 2$

[$ax+by = A$ とおき $xy = a^2b^2$ を代入]

$= A^2 - 2A - 2a^3b^3 + 2$

$= (A-1)^2 - 2a^3b^3 + 1$

いま、A の最小値 $2ab\sqrt{ab}$ は 1より大きいので、$(A-1)^2$ の最小値は (2)と同じく $x = b\sqrt{ab}$, $y = a\sqrt{ab}$ のとき。

このとき求める $(ax-1)^2 + (by-1)^2$ の値は、

$(2ab\sqrt{ab} - 1)^2 - 2a^3b^3 + 1$

$= 2a^3b^3 - 4ab\sqrt{ab} + 2$

$= \underline{2(ab\sqrt{ab} - 1)^2}$ //