岡山県立大学

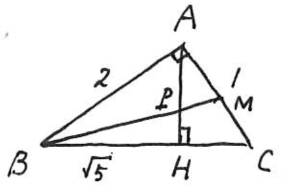
2014年 第1問

1 AB $=2$，BC $=\sqrt{5}$，CA $=1$ である三角形 ABC において，点 A から直線 BC に下ろした垂線の足を H，辺 AC の中点を M，直線 AH と直線 BM の交点を P とする．次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(3) 三角形 ABP の面積を求めよ．



(1) $2^2+1^2=(\sqrt{5})^2$ より $\angle BAC=90^\circ$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

(2) $AH\perp BC$ より．$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

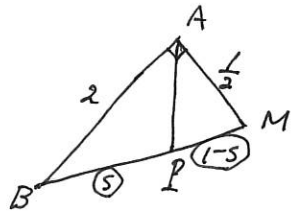
ここで $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ とおくと．$(*)$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=(x-y)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-x|\overrightarrow{AB}|^2+y|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$=-4x+y$$

$\therefore\ -4x+y=0\ \cdots①$



また，右図より．$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

と表せる $\therefore$ $(*)$ より．$x=1-s$，$y=\frac{1}{2}s$ ―― ②

①，② より．$-4+4s+\frac{1}{2}s=0$ $\therefore\ \frac{9}{2}s=4$ $\therefore\ s=\frac{8}{9}$

$\therefore\ \overrightarrow{AP}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$ //

(3) $\triangle ABM$ の面積は $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ なので

$\triangle ABP$ の面積は $\frac{1}{2}\cdot s=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}=\frac{4}{9}$ //