大阪大学

2017年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 実数 x, y, z が

$$x+y+z=1, \quad x+2y+3z=5$$

を満たすとする．

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ．

(2) $z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ．

(1)
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$
$$=\frac{1}{2}(x+y+z)\left\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} \cdots (*)$$ $x+y+z=1$ を代入した．

$x+y+z=1 \cdots ①$，$x+2y+3z=5 \cdots ②$

②−① より，$y+2z=4$ $\therefore y=-2z+4$

① に代入して，$x-2z+4+z=1$ $\therefore x=z-3$

これらを $(*)$ に代入して，z のみで表すと，

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}\left\{(3z-7)^2+(-3z+4)^2+3^2\right\}$$
$$=9z^2-33z+37$$
$$=9\left(z^2-\frac{11}{3}z\right)+37$$
$$=9\left(z-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{27}{4}$$

$\therefore$ 最小値は，$\frac{27}{4}$ $\left(x=-\frac{7}{6}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{11}{6}\text{ のとき}\right)$ //

(2) (1) より，$xyz=(z-3)(-2z+4)z$
$$=-2z^3+10z^2-12z$$

これを $f(z)$ とおくと，$f'(z)=-6z^2+20z-12$
$$=-2(3z^2-10z+6)$$

$f'(z)=0$ となるのは，$z=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$ のとき

z	0	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(z)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(z)$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$2<\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ と $f(2)=0$ より，右の増減表より $f\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)>f(2)=0$

よって，xyz が最大となる z は，$z=\frac{5+\sqrt{7}}{3}$ //