

2013年 商学部 第5問


 数理  
石井K

5 双曲線  $y = \frac{1}{x} + \frac{4}{3}$  を  $C_1$ , 曲線  $y = -\frac{1}{3}x^3 + a$  を  $C_2$ ,  $C_2$  と  $x$  軸の交点を通る  $y$  軸と平行な直線を  $L$  とする. ただし  $a$  は実数とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $C_1$  と  $C_2$  が第一象限で接するとき,  $a$  の値を求めよ.  
 (2) (1) で求めた  $a$  に対して,  $C_1$  と  $C_2$  と  $L$  で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1) 接点の  $x$  座標を  $\alpha$  とおくと ( $\alpha > 0$ )

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}\alpha^3 + a \quad \dots \textcircled{1}$$

接点における微分係数が等しいことから.

$$-\frac{1}{\alpha^2} = -\alpha^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } (\alpha^2 + 1)(\alpha + 1)(\alpha - 1) = 0 \quad \alpha > 0 \text{ より } \alpha = 1$$

$$\therefore \textcircled{1} \text{ に代入して. } \frac{7}{3} = -\frac{1}{3} + a \quad \therefore a = \frac{8}{3} //$$

(2) 求める面積を  $S$  とおくと.  $L: x = 2$  より

$$S = \int_1^2 \left( \frac{1}{x} + \frac{4}{3} - \left( -\frac{1}{3}x^3 + \frac{8}{3} \right) \right) dx$$

$$= \int_1^2 \left( \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x} - \frac{4}{3} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{12}x^4 + \log|x| - \frac{4}{3}x \right]_1^2$$

$$= \frac{4}{3} + \log 2 - \frac{8}{3} - \frac{1}{12} + \frac{4}{3}$$

$$= \log 2 - \frac{1}{12} //$$

