0001869810318999

島根大学

2013年 教育・生物資源科学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を，$a_1=1$, $b_1=0$, $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n$, $b_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n$ によって定め，座標が $(a_n,\ b_n)$ である点を C_n とする．原点を O とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}|$ を，n を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}_{n+1}}$ のなす角を求めよ．

(3) S_n を $\triangle \mathrm{OC}_n\mathrm{C}_{n+1}$ の面積とするとき，$S_n \leqq \frac{1}{2^{2013}}$ をみたす最小の自然数 n を求めよ．

(1) $\overrightarrow{OC_n}=(a_n,b_n)$ より，$|\overrightarrow{OC_n}|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ $\cdots$ ①

ここで，$a_{n+1}^2+b_{n+1}^2=\left(\frac{1}{4}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\right)^2$

$$=\frac{1}{4}(a_n^2+b_n^2)$$

∴数列 $\{a_n^2+b_n^2\}$ は 初項 $a_1^2+b_1^2=1$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列．

∴ $a_n^2+b_n^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ①に代入して．$|\overrightarrow{OC_n}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}}=\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ //

(2) $\overrightarrow{OC_n}\cdot\overrightarrow{OC_{n+1}}=(a_n,b_n)\cdot(a_{n+1},b_{n+1})$

$$=a_na_{n+1}+b_nb_{n+1}$$

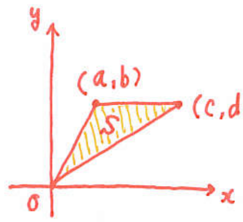
$$=a_n\left(\frac{1}{4}a_n-\frac{\sqrt{3}}{4}b_n\right)+b_n\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\right)$$

$$=\frac{1}{4}(a_n^2+b_n^2)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad (\because (1)より)$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

(3)は



$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$ を使った

∴ $\overrightarrow{OC_n}$ と $\overrightarrow{OC_{n+1}}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると．

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OC_n}\cdot\overrightarrow{OC_{n+1}}}{|\overrightarrow{OC_n}||\overrightarrow{OC_{n+1}}|}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2} \qquad \therefore\ \underline{\theta=60^\circ}\ //$$

(3) $S_n=\frac{1}{2}|a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n|$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{\sqrt{3}}{4}a_n^2+\frac{1}{4}a_nb_n-\frac{1}{4}a_nb_n+\frac{\sqrt{3}}{4}b_n^2\right|$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}$$

$S\leqq\frac{1}{2^{2013}}$ より $\frac{\sqrt{3}}{2^{2n+1}}\leqq\frac{1}{2^{2013}}$

∴ $2^{2n-2012}\geqq\sqrt{3}$

(左辺)は単調増加で 最小の n は

$\underline{n=1007}$ //