



2012年理系第6問

6  $2 \times 2$  行列  $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  に対して

$$\text{Tr}(P) = p + s$$

と定める.

$a, b, c$  は  $a \geq b > 0$ ,  $0 \leq c \leq 1$  を満たす実数とする. 行列  $A, B, C, D$  を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また実数  $x$  に対し  $U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$  とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 各実数  $t$  に対して,  $x$  の関数

$$f(x) = \text{Tr} \left( (U(t)AU(-t) - B)U(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U(-x) \right)$$

の最大値  $m(t)$  を求めよ. (ただし, 最大値をとる  $x$  を求める必要はない.)

(2) すべての実数  $t$  に対し

$$2\text{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geq \text{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$$

が成り立つことを示せ.