津田塾大学

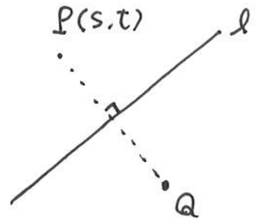
2013年 学芸（数学） 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ Oを原点とする座標平面上の直線 $y=x+1$ を ℓ とする．ℓ に関して点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ と対称な点をQとする．

(1) 点Qの座標を $s,\ t$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leqq 1$ をみたすような点Pの存在範囲を図示せよ．



(1) $Q(x,y)$ とおくと．線分PQの中点は ℓ 上にあるので

中点を求めると $\left(\dfrac{x+s}{2},\ \dfrac{y+t}{2}\right)$ より

$$\frac{y+t}{2}=\frac{x+s}{2}+1 \qquad \therefore\ y+t=x+s+2 \cdots ①$$

また．直線PQと ℓ は直交するので PQの傾きは -1

$$\therefore\ \frac{y-t}{x-s}=-1 \qquad \therefore\ y-t=s-x \cdots ②$$

①，②より．y を消去して．$2t=2x+2$ $\therefore\ x=t-1$ このとき．$y=s+1$

$$\therefore\ \underline{Q(t-1,\ s+1)}$$

←(これは P が ℓ 上にあるとき．対称な点を P 自身と考えれば P が ℓ 上のときも成り立っている．)

(2) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=s(t-1)+t(s+1)$

$$=2st-s+t$$

$$\therefore\ 2st-s+t\leqq 1 \iff \left(s+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)\leqq\frac{1}{4}$$

これは $xy=\frac{1}{4}$ の双曲線を x 方向に $-\frac{1}{2}$，y 方向に $\frac{1}{2}$ 移動したグラフから作られる領域なので

右のグラフになる．