



2015年工学部・生命環境（生命工）第5問

5 点 O を原点とする座標平面上において、点 $P(-6, 0)$ をとる。また、曲線

$$x = 3 \cos \theta, \quad y = 3 \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を C_1 とする。曲線 $C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ を次のように順次定義する。

「点 Q が曲線 C_n 上を動くとき、線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R のなす曲線を C_{n+1} とする。」

また、各自然数 n に対して、点 P を通る x 軸と異なる直線が曲線 C_n と接するとき、その接点を A_n とする。次に、 θ を 1 つ固定し、点 $X_1(x_1, y_1)$ を $x_1 = 3 \cos \theta, y_1 = 3 \sin \theta$ となる曲線 C_1 上の点とし、点 $X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ を次のように順次定義する。

「線分 PX_n を $1:2$ に内分する点を $X_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ とする。」

- (1) x_2 および y_2 を θ を用いて表せ。
- (2) $\angle A_1PO$ および $\angle A_2PO$ を求めよ。
- (3) x_n, y_n を θ を用いて表せ。
- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ を求めよ。
- (5) 直線 A_nA_{n+1} , 曲線 C_n および C_{n+1} で囲まれた領域の面積を a_n とするとき、極限值 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。