0002377812267999

岡山大学

2017年 文系 第1問

増田

$\boxed{1}$ aを実数とする．座標平面内の曲線$C: y=x^3-ax$について，以下の問いに答えよ．

(1) $a=5$のとき，Cの接線で点$(1,\ 0)$を通るものの方程式を求めよ．

(2) Cの接線で点$(1,\ 0)$を通るものが3本存在するようなaの範囲を求めよ．

(1) $a=5$のとき，$y=f(x)=x^3-5x$ とおく。

$f'(x)=3x^2-5$

接点のx座標をtとおくと，接線の方程式は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(t^3-5t)=(3t^2-5)(x-t)$ …(*)

これが$(x,y)=(1,0)$を通るので，

$-(t^3-5t)=(3t^2-5)(1-t)$

$2t^3-3t^2+5=0$

$t=-1$を代入すると成り立つため，$(t+1)$を因数にもつ。

$(t+1)(2t^2-5t+5)=0$

判別式 $D=25-4\cdot2\cdot5<0$ のため解なし

$\therefore t=-1$

$t=-1$を(*)に代入して

$y-(-1+5)=(3-5)(x+1)$

$\underline{y=-2x+2}$ //

(2) $f(x)=x^3-ax$ とおく。(1)と同様に，接点のx座標をtとおくと，接線の方程式は

$y-(t^3-at)=(3t^2-a)(x-t)$

これが$(x,y)=(1,0)$を通るので

$-(t^3-at)=(3t^2-a)(1-t)$

$2t^3-3t^2+a=0$

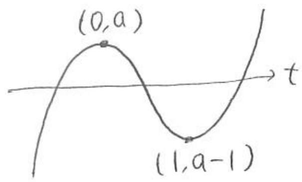
$g(t)=2t^3-3t^2+a$ とおき，グラフ $y=g(t)$ が t軸と異なる3つの交点をもつ範囲を求める。

$g'(t)=6t^2-6t$
$=6t(t-1)$

$g'(t)=0 \iff t=0,1$

$g(0)=a$

$g(1)=a-1$



右図より，

$a>0$ かつ $a-1<0$

のとき，$y=g(t)$ は t軸と異なる3点で交わる。

$\therefore \underline{0<a<1}$ //