2017年 文系 第4問

増田

$\boxed{4}$ 座標平面の原点を O(0, 0) とする．以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面上の異なる3点P，Q，Rが

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$$

を満たしているとする．このとき $\overrightarrow{RP}\perp\overrightarrow{RQ}$ となることを示せ．

(2) 点Qの座標を (3, 4) とし，点Rは $|\overrightarrow{OR}|=1$ を満たしているとする．さらに，$|\overrightarrow{OP}|\leqq 1$ を満たすすべての点Pに対して

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}\leqq 0$$

が成り立っているとする．このとき点Rの座標を求めよ．

(1) $|\overrightarrow{OR}|^2=\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OR}$ を代入して変形

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{OR}\cdot(\underbrace{\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}}_{=\overrightarrow{QR}=-\overrightarrow{RQ}})=0$$

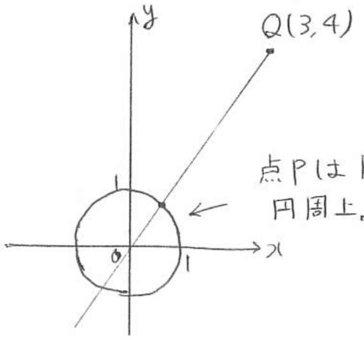
$$\overrightarrow{RQ}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR})=0$$

$$\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{RP}=0$$

内積がゼロなので なす角は90°で，

$\overrightarrow{RP}\perp\overrightarrow{RQ}$ となる。 ▨

(2)



点Pは円の内部または円周上。点Rは円周上。

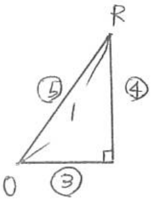
$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}\leqq 0 \text{ より.}$$

$$\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{RP}\leqq 0$$

ベクトル $\overrightarrow{RQ}$ と $\overrightarrow{RP}$ のなす角が90°より大きい。

点Pが半径1の円のどこにあっても $\overrightarrow{RQ}$ と $\overrightarrow{RP}$ のなす角が90°より大きくなるのは，点Rが線分OQ上にあるときのみ。

このとき点Rの座標は，



右図（3:4:5の直角三角形）で考えて

点R$\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ となる。