0002214905877999

群馬大学

2016年 理工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 定数 a は $0<a<1$ とし，また n は正の整数とする．ただし，$n=1$ のときは $(a-x)^{n-1}=1$ とする．

$$R_n = n\int_0^a \frac{(a-x)^{n-1}}{(1-x)^{n+1}}\,dx$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) R_1 と R_2 を求めよ．

(2) R_n を求めよ．

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} R_n$ の和を求めよ．

(1) $R_1 = \int_0^a \frac{1}{(1-x)^2}dx$

$= \left[(1-x)^{-1}\right]_0^a$

$= \frac{1}{1-a} - 1$

$= \underline{\frac{a}{1-a}}$ //

$R_2 = 2\int_0^a \frac{a-x}{(1-x)^3}dx$

$t=1-x$ とおいて，置換積分する．

$dt = -dx$

x	$0 \to a$
t	$1 \to 1-a$

$R_2 = 2\int_1^{1-a} \frac{a-(1-t)}{t^3}\cdot(-dt)$

$= 2\int_{1-a}^1 (a-1)t^{-3} + t^{-2}\,dt$

$= 2\left[-\frac{1}{2}(a-1)t^{-2} - t^{-1}\right]_{1-a}^1$

$= 2\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}(a-1)^{-1} + (1-a)^{-1}\right)$

$= \underline{\frac{a^2}{1-a}}$ //

(2) $R_n = n\int_0^a \left\{-(a-x)^n\cdot\frac{1}{n}\right\}'\cdot(1-x)^{-n-1}\,dx$

$= n\left[-\frac{1}{n}(a-x)^n\cdot(1-x)^{-n-1}\right]_0^a$

$\quad - n\int_0^a -\frac{1}{n}(a-x)^n\cdot(-n-1)\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-n-2}dx$

$= a^n + (n+1)\int_0^a \frac{(a-x)^n}{(1-x)^{n+2}}dx$

$= a^n + R_{n+1}$

$\therefore R_{n+1} = R_n - a^n$

$\frac{R_{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{R_n}{a^n} - \frac{1}{a}$

$\therefore \frac{R_{n+1}}{a^{n+1}} - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{a}\left(\frac{R_n}{a^n} - \frac{1}{1-a}\right)$

$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{R_{n-1}}{a^{n-1}} - \frac{1}{1-a}\right)$

$\vdots$

$= \frac{1}{a^n}\left(\frac{R_1}{a} - \frac{1}{1-a}\right)$ (1)より0になる．

$= 0$

$\therefore \frac{R_n}{a^n} - \frac{1}{1-a} = 0$ より，$\underline{R_n = \frac{a^n}{1-a}}$ //

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} R_n = \frac{1}{1-a}\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ 　$0<a<1$ より

$= \frac{1}{1-a}\cdot\frac{a}{1-a}$

$= \underline{\frac{a}{(1-a)^2}}$ //