

2016年 第5問

5 n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 三角関数の加法定理を用いて次の等式を示せ。

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

(2) 数学的帰納法によって、次の等式を証明せよ。

$$2\sin\frac{\theta}{2}\sum_{l=1}^n\cos l\theta = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \sin\frac{\theta}{2}$$

(3) m を整数とする。 $\theta \neq 2m\pi$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし、等号が成立する条件は調べなくてよい。

$$\left|\sum_{l=1}^n\cos l\theta\right| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{-1}\right)$$