



2012年理学部第3問

3 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^n e^{-t} dt$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定義する. ただし, e は自然対数の底とする. 次の各問に答えよ.

- (1) a_1 を求めよ.
- (2) $0 \leq t \leq 1$ のとき $t^n \leq t$ であることを用いて $a_n \leq \frac{a_1}{n!}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ.
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.
- (4) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{e(n+1)!}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ.
- (5) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$ を求めよ.