

2014年第7問

7 2つの確率変数 X, Y の確率分布を同時に考えた表 (同時確率分布表) が下のように与えられている。ただし, X, Y は互いに独立であり, $0 < a < 1, 0 < b < 1$ とする。このとき, 次の各問いに答えよ。

	Y	2	4	計
X				
1				a
2				
計		b		1

(1)

	Y	2	4	計
X				
1		ab	a(1-b)	a
2		b(1-a)	(1-a)(1-b)	1-a
計		b	1-b	1

- (1) 表を完成させ, 完成させた表を書け。
 (2) 確率変数 $W = X - Y$ の平均 $E(W)$ を求めよ。
 (3) 確率変数 $Z = \frac{Y}{X}$ の確率分布表を作成し, Z の平均 $E(Z)$ を求めよ。
 (4) $E(Z) = \frac{9}{4}, E(W) = -\frac{3}{2}$ となる場合に, Z の分散 $V(Z)$ を求めよ。

$$(2) E(W) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 1 \cdot a + 2 \cdot (1-a) - 2 \cdot b - 4(1-b) = -a + 2b - 2 //$$

(3)

Z	1	2	4	計
確率	b(1-a)	ab + (1-a)(1-b)	a(1-b)	1

$$E(Z) = 1 \cdot b(1-a) + 2ab + 2(1-a)(1-b) + 4a(1-b)$$

$$= b - ab + 2ab + 2 - 2a - 2b + 2ab + 4a - 4ab$$

$$= -ab + 2a - b + 2 //$$

$$(4) \begin{cases} -ab + 2a - b + 2 = \frac{9}{4} \\ -a + 2b - 2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab - 2a + b = -\frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{1} \\ a = 2b - \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して, } 8b^2 - 14b + 5 = 0 \quad \therefore (2b-1)(4b-5) = 0$$

$$0 < b < 1 \text{ より, } b = \frac{1}{2} \quad \text{このとき } \textcircled{2} \text{ より } a = \frac{1}{2}$$

Z	1	2	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\therefore V(Z) = E(Z^2) - \{E(Z)\}^2$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 4^2 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{81}{16}$$

$$= \frac{19}{16} //$$