



2016年全学部（理工）第3問

3 次の空欄に当てはまる0から9までの数字を入れよ。ただし、空欄 サシ は2桁の数をあらわす。

(1) k を自然数とすると

$$\int_0^{\pi} \sin^k x \cos x dx = \boxed{\text{ア}}$$

である。

(2) 直線 $y = \sqrt{3}x$ を l とし、曲線 $y = \sqrt{3}x + \sin^2 x$ を C とする。直線 l 上に点 A をとり、点 A において直線 l と直交する直線を L とする。関数 $y = \sqrt{3}x + \sin^2 x$ は x に関する単調増加関数であるので、直線 L と曲線 C の共有点は1点のみである。その共有点を $B(t, \sqrt{3}t + \sin^2 t)$ とする。点 A と点 B の距離を h とおくと、

$$h = \frac{1}{\boxed{\text{イ}}} \sin^2 t$$

となる。また、原点 O と点 A の距離を p とする。点 A の x 座標が0以上であるときは

$$p = \boxed{\text{ウ}} t + \frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}} \sin^2 t$$

となる。この等式の右辺を $f(t)$ とおく。

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で曲線 C と直線 l で囲まれた図形を考え、その図形を直線 l の周りに1回転させてできる立体の体積を V とすると、 $V = \pi \int_0^{\boxed{\text{カ}}} h^2 dp$ となる。ここで、 $p = f(t)$ とおいて置換積分すれば、

$$V = \frac{\pi}{\boxed{\text{キ}}} \int_0^{\pi} \sin^4 t dt$$

が成り立つ。 $\int_0^{\pi} \sin^4 t dt = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \pi$ より、 $V = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}} \pi^2$ である。