



2012年 医学部 第4問

4 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  で表される 1 次変換を  $f$  とする.  $f$  によって, 点  $P_0(1, 0)$  が移る点を  $P_1(x_1, y_1)$ , 正の整数  $n$  に対して点  $P_n(x_n, y_n)$  が移る点を  $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$  とする. 原点を  $O$  として, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $\cos \angle P_n O P_{n+1}$  の値を求めよ.
- (2) 2 以上の整数  $n$  で, 直線  $OP_n$  が線分  $P_0 P_1$  と交わる最小の  $n$  を求めよ.
- (3)  $i$  を虚数単位とする. 0 でない整数  $n$  に対して, 実数  $a_n, b_n$  を  $(2 + 3i)^n = a_n + b_n i$  により定める. このとき次の等式

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

が 0 でないすべての整数  $n$  に対して成り立つことを証明せよ. ただし, 正の整数  $m$  に対し  $A^{-m} = (A^m)^{-1}$  とする.