

2010年教育学部（中等数学）第2問

2 自然数 N は 30 の倍数である。

$$U = \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ 以上 } N \text{ 以下の奇数}\},$$

$$A = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\},$$

$$B = \{x \mid x \in U, x \text{ は } 5 \text{ の倍数}\},$$

とし、集合 $U, A, B, A \cap B$ の要素の個数をそれぞれ u_N, a_N, b_N, c_N と表す。次の問いに答えよ。

(1) u_N, a_N, b_N, c_N を N を用いて表せ。

(2) N 以下の素数の個数を P_N とするとき、不等式 $P_N \leq u_N - a_N - b_N + c_N + 2$ を示せ。

(3) (2) の P_N について、 $\frac{P_N}{N} \leq \frac{1}{3}$ を示せ。