0001637452638999

名古屋大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 原点を中心とする半径1の円を C とし，x 軸上に点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ をとる．ただし $a>1$ とする．P から C へ引いた2本の接線の接点を結ぶ直線が x 軸と交わる点を Q とする．

(1) Q の x 座標を求めよ．

(2) 点 R が C 上にあるとき，$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}$ が R によらず一定であることを示し，その値を a を用いて表せ．

(3) C 上の点 R が $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ をみたすとする．このような R の座標と線分 PR の長さを求めよ．

(1) 接点の座標を (s, t) とおくと．

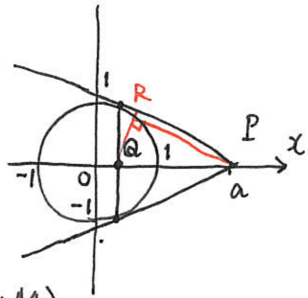
円周上にあることより．$s^2+t^2=1$ …①

このとき接線は $sx+ty=1$ と表せる

これが P を通ることから $sa=1$ ∴ $s=\dfrac{1}{a}$

Q の x 座標は接点の x 座標に等しいから（図形の対称性）

<ins>Q の x 座標は $\dfrac{1}{a}$</ins> //



(2) $\mathrm{R}(u, v)$（ただし，$u^2+v^2=1$）とおくと

$$\left(\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}\right)^2=\frac{(u-a)^2+v^2}{\left(u-\frac{1}{a}\right)^2+v^2}$$

$$=\frac{u^2+v^2-2au+a^2}{u^2+v^2-\frac{2u}{a}+\frac{1}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2(1-2au+a^2)}{1-2au+a^2}$$

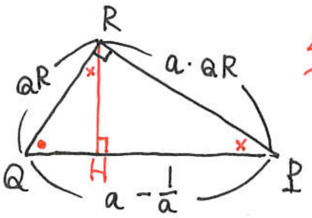
$$=a^2$$

∴ <ins>$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=a$</ins> //

(3) 右図より．

$$\mathrm{QR}^2+a^2\mathrm{QR}^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

∴ $\mathrm{QR}=\dfrac{a^2-1}{a\sqrt{a^2+1}}$ ∴ <ins>$\mathrm{PR}=a\cdot\mathrm{QR}=\dfrac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}$</ins> //



△PQR ∽ △RQH

(3) のつづき．

R から x 軸に垂線を下ろし，足を H とおくと．

△PQR ∽ △RQH

∴ $a-\dfrac{1}{a}:a\mathrm{QR}=\mathrm{QR}:\mathrm{RH}$

$$\mathrm{RH}=\frac{a^2-1}{a^2+1}$$

∴ <ins>$\mathrm{R}\left(\dfrac{2a}{a^2+1},\ \pm\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)$</ins> //