岡山大学

2013年 文系 第4問

$\boxed{4}$ C を xy 平面上の放物線 $y=x^2$ とする．不等式 $y<x^2$ で表される領域の点Pから C に引いた2つの接線に対して，それぞれの接点の x 座標を α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ とする．また，2つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，等式

$$\int_p^q (x-p)^2\,dx=\frac{(q-p)^3}{3}$$

を用いてもよい．

(1) 点Pの座標 $(a,\ b)$ を α，β を用いて表せ．

(2) $S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ を示せ．

(3) 点Pが曲線 $y=x^3-1\,(-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$ の値の範囲を調べよ．さらに，S の最大値および最小値を与える点Pの座標を求めよ．