0002378091267999

岡山大学

2017年 文系 第3問

増田

$\boxed{3}$ a を実数とする．x の2次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(2) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ．

(3) a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ．

(1) $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+1$ の区間 $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ における最小値を求める。

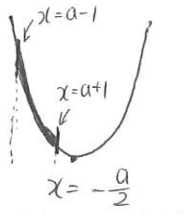
$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+1-\frac{1}{16}$$
$$=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$$

$f(x)$ は $x=-\frac{1}{4}$ のとき 最小値 $\frac{15}{16}$ をもつ。

$$\therefore\ m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{16}$$

(2) $f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1-\frac{a^2}{4}$

区間が 頂点 $x=-\frac{a}{2}$ より左にあるか、右にあるか、頂点を含むかで場合分けする。



(左にある場合)

i) $a+1<-\frac{a}{2}$ つまり $a<-\frac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=f(a+1)$$
$$=(a+1)^2+a(a+1)+1$$
$$=2a^2+3a+2$$

ii) $-\frac{a}{2} \leqq a-1$ つまり $a \geqq \frac{2}{3}$ のとき

$$m(a)=f(a-1)$$
$$=(a-1)^2+a(a-1)+1$$
$$=2a^2-3a+2$$

iii) $-\frac{2}{3} \leqq a < \frac{2}{3}$ のとき (頂点が最小)

$$m(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)$$
$$=1-\frac{a^2}{4}$$

以上より

$$m(a)=\begin{cases} 2a^2+3a+2 & \left(a<-\frac{2}{3}\right) \\ 1-\frac{a^2}{4} & \left(-\frac{2}{3} \leqq a < \frac{2}{3}\right) \\ 2a^2-3a+2 & \left(a \geqq \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

(3)

$$m'(a)=\begin{cases} 4a+3 & \Rightarrow a=-\frac{3}{4} \text{ で最小} \\ -\frac{a}{2} & \Rightarrow a=0 \text{ で最大} \\ 4a-3 & \Rightarrow a=\frac{3}{4} \text{ で最小} \end{cases}$$

$m(a)$ は区間の境界 $\left(a=\pm\frac{2}{3}\right)$ でなめらかにつながっているので、最小値の候補は $m\left(-\frac{3}{4}\right)$ か $m\left(\frac{3}{4}\right)$

$$m\left(-\frac{3}{4}\right)=2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+2$$
$$=\frac{7}{8}$$

$$m\left(\frac{3}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\left(\frac{3}{4}\right)+2$$
$$=\frac{7}{8}$$

よって $m(a)$ の最小値は $\frac{7}{8}$

そのとき $a=\pm\frac{3}{4}$