

2012年理(数学科)第4問

4 以下では、実数を成分にもつ行列を考える。

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ とする。

(i) $a > 0, d \geq 0$ または $a \geq 0, d > 0$ のとき、 $X^2 = A$ を満たす行列 X を1つ求めよ。(ii) $a < 0$ または $d < 0$ のとき、 $X^2 = A$ を満たす行列 X が存在するための必要十分条件を a, b, d を用いて表せ。また、この条件が成り立つとき、 $X^2 = A$ を満たす行列 X を1つ求めよ。(iii) $a = d = 0, b \neq 0$ のとき、 $X^2 = A$ を満たす行列 X は存在しないことを示せ。

(2) $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(i) $p + s = 0, ps - qr = 0$ となることを示せ。(ii) $B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、 $X^2 = B$ を満たす行列 X は存在しないことを示せ。