



2013年文系第4問

4 C を xy 平面上の放物線 $y = x^2$ とする. 不等式 $y < x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して, それぞれの接点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする. また, 2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, 等式

$$\int_p^q (x-p)^2 dx = \frac{(q-p)^3}{3}$$

を用いてもよい.

(1) 点 P の座標 (a, b) を α, β を用いて表せ.

(2) $S = \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}$ を示せ.

(3) 点 P が曲線 $y = x^3 - 1$ ($-1 \leq x \leq 1$) 上を動くとき, $(\beta - \alpha)^2$ の値の範囲を調べよ. さらに, S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ.