2015年 文系 第3問

数理 石井K

3 数列 $\{a_n\}$ は，関係式

$$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) b_{n+1} と b_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_{n+2}-a_{n+1}-3(a_{n+1}-a_n)=1$

$\therefore\ \underline{b_{n+1}=3b_n+1}$ //

(2) $b_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(b_n+\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 数列 $\left\{b_n+\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $b_1+\frac{1}{2}=a_2-a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，公比 3 の

等比数列となるので，$b_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$ $\quad\therefore\ \underline{b_n=\frac{3^n-1}{2}}$ //

(3) 階差数列が b_n なので a_n は．

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3^k-1}{2}\quad(n\geqq 2)$$

$$=1+\frac{1}{2}\left\{\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-(n-1)\right\}$$

$$=\frac{3^n-2n+3}{4}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$\therefore\ \underline{a_n=\frac{3^n-2n+3}{4}\ (n=1,2,3,\cdots)}$ //