0002378361267999

2017年 理系 第2問

増田

2 座標平面内の2つの曲線

$$C_1 : y = \log(2x), \quad C_2 : y = 2\log x$$

の共通接線を ℓ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) C_1，C_2 および ℓ で囲まれる領域の面積を求めよ．

(1) C_1 上の接点の x 座標を s,
C_2 〃 t とする。

C_1 : $y' = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$

C_2 : $y' = 2 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}$

接線の方程式は、

C_1 : $y - \log(2s) = \dfrac{1}{s}(x - s)$

$$y = \frac{1}{s}x + \log(2s) - 1 \cdots ①$$

C_2 : $y - 2\log t = \dfrac{2}{t}(x - t)$

$$y = \frac{2}{t}x + 2\log t - 2 \cdots ②$$

①,②が一致するとき，

$\dfrac{1}{s} = \dfrac{2}{t}$ よって $t = 2s$

また，$\log(2s) - 1 = 2\log t - 2$ に
$t = 2s$ を代入して

$$\log(2s) - 1 = 2\log(2s) - 2$$

$$\log(2s) = 1$$

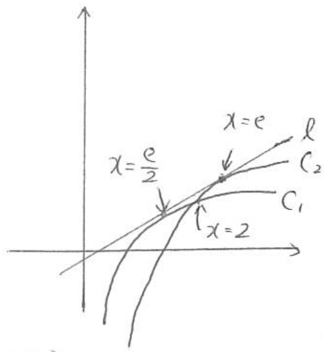
$$2s = e$$

$$\therefore s = \frac{e}{2}$$

これを①に代入して，直線 ℓ の方程式は，

$$y = \frac{2}{e}x$$

(2)



C_1 と C_2 の交点を求める。

$$\log(2x) = 2\log x$$

$$2x = x^2$$

$$x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2$$

(真数条件より $x>0$ だから)

ℓ と C_1 の交点(接点)は $x = \dfrac{e}{2}$，

ℓ と C_2 の 〃 $x = e$

よって求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{e}{2}}^{2} \left\{ \frac{2}{e}x - \log(2x) \right\} dx + \int_{2}^{e} \left\{ \frac{2}{e}x - 2\log x \right\} dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{e}{2}}^{2} \log(2x)\,dx$

部分積分を用いる。

$$= \int_{\frac{e}{2}}^{2} (\log 2 + \log x)\,dx$$

$$= \left(2 - \frac{e}{2}\right)\log 2 + \Big[x\log x - x\Big]_{\frac{e}{2}}^{2}$$

$$= 4\log 2 - 2$$

$$\int_{2}^{e} \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_{2}^{e}$$

$$= -2\log 2 + 2$$

$$S = \frac{2}{e}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{e}{2}}^{2} - (4\log 2 - 2) + \frac{2}{e} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{2}^{e} - 2(-2\log 2 + 2)$$

$$= \frac{3}{4}e - 2$$