



2017年理系第4問

4 α は $0 < |\alpha| < 1$ を満たす虚数であるとする. 複素数平面上の点の列 z_1, z_2, z_3, \dots を, $z_1 = 0, z_2 = 1$ および

$$\begin{cases} z_{2n+1} - z_{2n} = \alpha(z_{2n} - z_{2n-1}) & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ z_{2n+2} - z_{2n+1} = \bar{\alpha}(z_{2n+1} - z_{2n}) & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定める. ただし, 虚数とは虚部が0でない複素数のことであり, また, $\bar{\alpha}$ は α に共役な複素数を表すものとする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$z_{2n+2} - z_{2n} = |\alpha|^2(z_{2n} - z_{2n-2}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

(2) 偶数番目の点の列 z_2, z_4, z_6, \dots および奇数番目の点の列 z_1, z_3, z_5, \dots は, それぞれ同一直線上にあることを示せ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0$ を満たす複素数 w を求めよ.