



2010年理系第3問

3 原点を中心とする半径1の円を  $C_1$  とし、原点を中心とする半径  $\frac{1}{2}$  の円を  $C_2$  とする。  $C_1$  上に点  $P_1(\cos \theta, \sin \theta)$  があり、また、  $C_2$  上に点  $P_2(\frac{1}{2} \cos 3\theta, \frac{1}{2} \sin 3\theta)$  がある。ただし、  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  であるとする。線分  $P_1P_2$  の中点を  $Q$  とし、点  $Q$  の原点からの距離を  $r(\theta)$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点  $Q$  の  $x$  座標の取りうる範囲を求めよ。
- (2) 点  $Q$  が  $y$  軸上にあるときの  $\theta$  の値を  $\alpha$  とする。このとき、  $\alpha$  および定積分

$$\int_0^{\alpha} \{r(\theta)\}^2 d\theta$$

を求めよ。