0000097092099999

# 岡山大学

2011年 理系 第1問

数理 石井K

**1** $t$を実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix}$について，次の問いに答えよ．

(1) $A$の逆行列$A^{-1}$が存在することを示せ．

(2) $A+A^{-1}$，$A-A^{-1}$，$(A-A^{-1})^2$を求めよ．

(3) $A^{2n}-tA^n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)が$n$によらない行列になるという．このときの$t$の値を求めよ．

(1) $\det A = t(2-t)-(t-1)(1-t)$

$= 1$

よって，$\det A \neq 0$より，$A$の逆行列$A^{-1}$が存在する ■

(2) (1)より，$\det A = 1$ $\quad \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix}$

$\therefore A+A^{-1}=\begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$ //

$A-A^{-1}=\begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2-t & 1-t \\ t-1 & t \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 2t-2 & 2t-2 \\ 2-2t & 2-2t \end{pmatrix}}$ //

$A-A^{-1}=(2t-2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ より，$(A-A^{-1})^2=(2t-2)^2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ //

(3) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$とおくと，$B^2=O$ また $2\times 2$の単位行列を$E$とおく

(2)より，$A+A^{-1}=2E \cdots ①$，$A-A^{-1}=2(t-1)B \cdots ②$

①＋②より，$2A=2E+2(t-1)B$

$\therefore A=E+(t-1)B$

$B^2=O$に注意すると，$A^n=E+n(t-1)B \cdots ③$

同様にして，$A^{2n}=E+2n(t-1)B \cdots ④$

$\therefore A^{2n}-tA^n = E+2n(t-1)B-t\{E+n(t-1)B\}$

$= (1-t)E+n(t-1)(2-t)B$

これが$n$によらない行列になるので，$\underline{t=1, 2}$ //