



2017年文系第2問

増田

2 自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3}) = R(2^n)$ となることを示せ。
 (2) $R(2^{2017})$ を求めよ。
 (3) 自然数 m が $R(2^{2017}m + 2^{29}) = 5$ を満たすとき、 $R(m)$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad 2^{n+3} &= 8 \cdot 2^n \\ &= \underbrace{7 \cdot 2^n + 2^n}_{7 \text{ で割り切れる。}} \end{aligned}$$

$$\text{よって } R(2^{n+3}) = R(2^n) \quad \square$$

$$\begin{aligned} (2) \quad R(2^{2017}) &= R(2^{2014}) = R(2^{2011}) \\ &= \dots = R(2^1) = \underline{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad R(2^{29}) &= R(2^{26}) = \dots = R(2^2) = 4 \\ R(2^{2017}m + 2^{29}) &= 5 \text{ より。} \end{aligned}$$

$$2^{2017}m + 2^{29} - 5 = 7k \quad (k: \text{整数})$$

とおける。

また、 $(2^{2017} - 2)$ 、 $(2^{29} - 4)$ も 7 の倍数なので、左辺からこれを括り出すと

$$\begin{aligned} (2^{2017} - 2)m + (2^{29} - 4) &= 7k + 5 - 2m - 4 \\ &= 7k - (2m - 1) \end{aligned}$$

左辺が 7 の倍数だから、右辺も 7 の倍数で、

$$2m - 1 = 7k' \quad (k': \text{整数})$$

とおける。

$$2m = 7k' + 1 \text{ を変形して}$$

$$2m = 7(k' - 1) + 8$$

$$2(m - 4) = 7(k' - 1)$$

2 と 7 は互いに素だから、 $m - 4$ は

$$7 \text{ の倍数。よって } \underline{R(m) = 4} \quad \#$$