

2012 年 理系 第 4 問

4  $|a^2 - 2b^2| = 1$  をみたす整数  $a, b$  によって,  $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$  と表される 2 次の正方行列全体の集合を  $U$  とする. このとき,  $U$  に属する行列  $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$  に対して,  $f(A) = a + \sqrt{2}b$  とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) 二つの行列  $A$  と  $B$  が  $U$  に属するならば, 積  $AB$  も  $U$  に属することを示し, さらに  $f(AB) = f(A)f(B)$  が成り立つことを示せ.
- (2)  $U$  に属する行列  $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$  について,  $f(A) \geq 1$  ならば,  $-1 \leq a - \sqrt{2}b \leq 1$  が成り立つことを示せ.
- (3)  $U$  に属する行列  $A$  について,  $1 \leq f(A) < 1 + \sqrt{2}$  ならば,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  であることを示せ.
- (4)  $U$  に属する行列  $A$  について,  $1 + \sqrt{2} \leq f(A) < (1 + \sqrt{2})^2$  ならば,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  であることを示せ.