2012年 第4問

1枚目 / 2枚

4 mを定数とし，2つの曲線

$$y = f(x) = -x^2 + mx - 3, \quad y = g(x) = x^3 - x$$

が，点A$(a,\ f(a))$を通り，Aで共通の接線ℓをもつ．次の問いに答えよ．

(1) $y = g(x)$のグラフをかけ．

(2) $a,\ m$の値と，接線ℓの方程式を求めよ．

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^3 |f(x)|\,dx$ の値を求めよ．

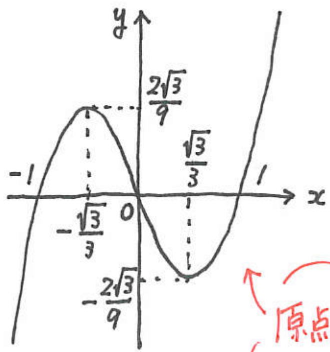
x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

(1) $g'(x) = 3x^2 - 1$

$= 3\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　∴増減表は右となる

また，$g(-1) = g(0) = g(1) = 0$ より，

グラフは右のようになる．



原点に関して対称

(2) $f'(x) = -2x + m$ より，

接線は，$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ より

$\ell : y = (-2a+m)(x-a) - a^2 + ma - 3$ と表せる．

∴ $\ell : y = (-2a+m)x + a^2 - 3$ ⋯①

一方，$g'(x) = 3x^2 - 1$ より，

$\ell : y = (3a^2-1)(x-a) + a^3 - a$ と表せる．

∴ $\ell : y = (3a^2-1)x - 2a^3$ ⋯②

①と②は同一の直線を表すので，係数を比較して，

$$\begin{cases} -2a + m = 3a^2 - 1 & \cdots ③ \\ a^2 - 3 = -2a^3 & \cdots ④ \end{cases}$$

因数定理．

④より，$(a-1)(2a^2+3a+3) = 0$　　ここで，$2a^2+3a+3 = 2\left(a+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0$

∴ $\underline{a = 1}$ //　③に代入して，$\underline{m = 4}$ //　このとき，$\underline{\ell : y = 2x - 2}$ //

2枚目につづく

2012年 第4問

2枚目／2枚.

数理 石井K

$\boxed{4}$ mを定数とし，2つの曲線

$$y=f(x)=-x^2+mx-3,\quad y=g(x)=x^3-x$$

が，点A$(a,\ f(a))$を通り，Aで共通の接線ℓをもつ．次の問いに答えよ．

(1) $y=g(x)$のグラフをかけ．

(2) a, mの値と，接線ℓの方程式を求めよ．

(3) 積分$\displaystyle\int_0^3 |f(x)|\,dx$の値を求めよ．

(3) (2)より. $f(x)=-x^2+4x-3$

$=-(x-3)(x-1)$

$\therefore$ $0\leqq x\leqq 1$ では. $f(x)\leqq 0$, $1\leqq x\leqq 3$ では $f(x)\geqq 0$

$$\therefore \int_0^3 |f(x)|\,dx=\int_0^1 -f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 x^2-4x+3\,dx+\int_1^3 -x^2+4x-3\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_0^1+\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{3}-2+3-9+18-9+\frac{1}{3}-2+3$$

$$=\underline{\frac{8}{3}}\ /\!/$$