0001857272418999

山形大学

2014年 医学部 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1) $P=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-4}{5a_n-2}$ で定める．

(i) $A^n=\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ とおくとき，$A^{n+1}=AA^n$ であることと数学的帰納法を用いて $a_{n+1}=\dfrac{2p_n+q_n}{2r_n+s_n}$ が成り立つことを示せ．

(ii) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $P^{-1}=\dfrac{1}{4-5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

$\therefore\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$ //

(2) $P^{-1}A^nP=\underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{n\text{個}}=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$\therefore\ A^n=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} -4\cdot2^n+5\cdot3^n & 4\cdot2^n-4\cdot3^n \\ -5\cdot2^n+5\cdot3^n & 5\cdot2^n-4\cdot3^n \end{pmatrix}}$ //

(3) (i) 数学的帰納法で示す．

(A) $n=1$ のとき．$A^1=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ より $p_1=7,\ q_1=-4,\ r_1=5,\ s_1=-2$

$\therefore\ a_2=\dfrac{7\cdot2+(-4)}{5\cdot2-2}=\dfrac{5}{4}$

一方，漸化式より．$a_2=\dfrac{7\cdot2-4}{5\cdot2-2}=\dfrac{5}{4}$ となり 成り立つ

(B) $n=k$ のとき 成り立つと仮定すると．$a_{k+1}=\dfrac{2p_k+q_k}{2r_k+s_k}$

$\therefore\ a_{k+2}=\dfrac{7a_{k+1}-4}{5a_{k+1}-2}=\dfrac{7\cdot\frac{2p_k+q_k}{2r_k+s_k}-4}{5\cdot\frac{2p_k+q_k}{2r_k+s_k}-2}=\dfrac{14p_k+7q_k-8r_k-4s_k}{10p_k+5q_k-4r_k-2s_k}\quad\cdots(*)$

2枚目につづく

2014年 医学部 第4問

2枚目／2枚

数理 石井K

4 行列 $A=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 5 & -2\end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1) $P=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ とするとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{7a_n-4}{5a_n-2}$ で定める．

(i) $A^n=\begin{pmatrix}p_n & q_n\\ r_n & s_n\end{pmatrix}$ とおくとき，$A^{n+1}=AA^n$ であることと数学的帰納法を用いて $a_{n+1}=\dfrac{2p_n+q_n}{2r_n+s_n}$ が成り立つことを示せ．

(ii) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) のつづき．

ここで $A^{k+1}=A\cdot A^k$ より $\begin{pmatrix}p_{k+1} & q_{k+1}\\ r_{k+1} & s_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_k & q_k\\ r_k & s_k\end{pmatrix}$

$\therefore\ p_{k+1}=7p_k-4r_k$，$q_{k+1}=7q_k-4s_k$，$r_{k+1}=5p_k-2r_k$，$s_{k+1}=5q_k-2s_k$

$\therefore\ 2p_{k+1}+q_{k+1}=14p_k-8r_k+7q_k-4s_k$，$2r_{k+1}+s_{k+1}=10p_k-4r_k+5q_k-2s_k$

これらと (＊) より $a_{k+2}=\dfrac{2p_{k+1}+q_{k+1}}{2r_{k+1}+s_{k+1}}$ $\therefore\ n=k+1$ も成り立つ

(A)，(B) より．与式は $n=1, 2, \cdots$ に対して成り立つ ▨

(ii) (2) と (3) の (i) より．

$$a_{n+1}=\frac{-8\cdot 2^n+10\cdot 3^n+4\cdot 2^n-4\cdot 3^n}{-10\cdot 2^n+10\cdot 3^n+5\cdot 2^n-4\cdot 3^n}=\frac{-4\cdot 2^n+6\cdot 3^n}{-5\cdot 2^n+6\cdot 3^n}$$

$\therefore\ n\geqq 2$ のとき．$a_n=\dfrac{-4\cdot 2^{n-1}+6\cdot 3^{n-1}}{-5\cdot 2^{n-1}+6\cdot 3^{n-1}}$ これは $n=1$ のときも成り立つ

2で分子・分母をわって

$a_n=\dfrac{3^n-2^n}{3^n-5\cdot 2^{n-2}}$ でも良い