0000212097879999

岡山県立大学

2010年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ Oを原点とする座標平面において，曲線 $y=x^3$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点をHとする．ただし，$t>0$ である．Hを通り線分OPに垂直な直線と y 軸との交点をQとし，線分HQと線分OPの交点をRとする．△ORQの面積を S_1，△HPRの面積を S_2 とする．以下の問いに答えよ．

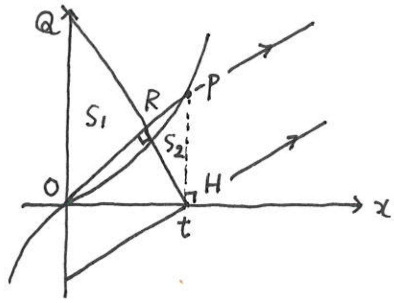
(1) 点Qの y 座標を求めよ．

(2) 点Rの x 座標を求めよ．

(3) S_1 と S_2 を t の式で表せ．

(4) $\lim_{t\to\infty} S_1S_2$ の値を求めよ．

(5) S_1+S_2 の最小値を求めよ．



(1) OPの傾きは，t^2 より，QHの傾きは $-\dfrac{1}{t^2}$

$\therefore$ 直線QH：$y=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)$ $\quad\therefore y=-\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{1}{t}$

$\therefore$ Qの y 座標は $\underline{\dfrac{1}{t}}$ //

(2) OP：$y=t^2x$ より，$t^2x+\dfrac{1}{t^2}x-\dfrac{1}{t}=0$ $\quad\therefore x=\underline{\dfrac{t}{t^4+1}}$ //

(3) (1), (2)より，$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{t}{t^4+1}=\underline{\dfrac{1}{2(t^4+1)}}$ //

△ORQ ∽ △PRH で相似比は OQ：PH $=\dfrac{1}{t}:t^3=1:t^4$

$\therefore$ 面積比は $1:t^8$ $\quad\therefore \underline{S_2=\dfrac{t^8}{2(t^4+1)}}$ //

(4) $S_1S_2=\dfrac{t^8}{4(t^4+1)^2}$ $\quad\therefore \lim_{t\to\infty}S_1S_2=\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{2}{t^4}+\frac{1}{t^8}}$

$=\underline{\dfrac{1}{4}}$ //

(5) $S_1+S_2=\dfrac{t^8+1}{2(t^4+1)}$

$=\dfrac{(t^4+1)(t^4-1)+2}{2(t^4+1)}$

$=\dfrac{t^4-1}{2}+\dfrac{1}{t^4+1}$

$=\dfrac{t^4+1}{2}+\dfrac{1}{t^4+1}-1$

$\geqq 2\sqrt{\dfrac{t^4+1}{2}\cdot\dfrac{1}{t^4+1}}-1$ 相加・相乗

$=\sqrt{2}-1$

$$\begin{array}{r} t^4-1 \\ t^4+1\,\overline{)\,t^8+1} \\ \underline{t^8+t^4} \\ -t^4+1 \\ \underline{-t^4-1} \\ 2 \end{array}$$

$\therefore$ 最小値は $\underline{\sqrt{2}-1}$ //