

2010年第3問

3 Oを原点とする座標平面において、曲線 $y = x^3$ 上の点 $P(t, t^3)$ から $x$ 軸に下ろした垂線と $x$ 軸との交点を $H$ とする。ただし、 $t > 0$ である。 $H$ を通り線分 $OP$ に垂直な直線と $y$ 軸との交点を $Q$ とし、線分 $HQ$ と線分 $OP$ の交点を $R$ とする。 $\triangle ORQ$ の面積を $S_1$ 、 $\triangle HPR$ の面積を $S_2$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 $Q$ の $y$ 座標を求めよ。
- (2) 点 $R$ の $x$ 座標を求めよ。
- (3)  $S_1$ と $S_2$ を $t$ の式で表せ。
- (4)  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_1 S_2$ の値を求めよ。
- (5)  $S_1 + S_2$ の最小値を求めよ。