岐阜大学

2014年 第5問　1枚目／2枚

数理 石井K

5 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 を求めよ．また，それより一般項 a_n を推定せよ．

(2) 数学的帰納法により，(1) の一般項の推定が正しいことを証明せよ．

(3) n を正の整数とする．すべての実数 x に対して，不等式

$$a_n x^2 + x + 1 \geqq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(4) n を正の整数とする．すべての実数 x に対して，不等式

$$x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x^2 + x + 1 \geqq a_n$$

が成り立つことを示せ．

(1) $\underline{a_2 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}}$ //

$\underline{a_3 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{8}}$ //

$\underline{a_4 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{3}{5}}$ //

$\underline{a_5 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{7}{12}}$ //

$\underline{a_6 = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{7} = \frac{4}{7}}$ //

$\therefore$ $\underline{a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}}$ // と推定される

(2) 数学的帰納法により，$a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ を示す

(i) $n=1$ のとき．

$$a_1 = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \quad \therefore \text{成り立つ．}$$

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると．$a_k = \dfrac{k+2}{2(k+1)}$

$$\therefore a_{k+1} = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$= 1 - \frac{k+1}{2(k+2)}$$

$$= \frac{k+3}{2(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)+2}{2\{(k+1)+1\}}$$

$\therefore$ $n=k+1$ のときも成り立つ

(i).(ii)より．

すべての $n=1,2,3,\cdots$ について

$a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ が成り立つ ■

2014年 第5問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{5}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 を求めよ．また，それより一般項 a_n を推定せよ．

(2) 数学的帰納法により，(1) の一般項の推定が正しいことを証明せよ．

(3) n を正の整数とする．すべての実数 x に対して，不等式

$$a_n x^2 + x + 1 \geqq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(4) n を正の整数とする．すべての実数 x に対して，不等式

$$x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x^2 + x + 1 \geqq a_n$$

が成り立つことを示せ．

(3) $f(x) = a_n x^2 + x + 1 - a_{n+1}$ とおくと．

$f(x) = 0$ の判別式 D は．

$D = 1^2 - 4a_n(1 - a_{n+1})$

$= 1 - 4a_n \cdot \dfrac{1}{4a_n}$　$a_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{4a_n}$ より．

$= 0$

∴ すべての x に対して．$f(x) \geqq 0$

すなわち．$a_n x^2 + x + 1 \geqq a_{n+1}$ となる ■

(4) 数学的帰納法で示す．

(i) $n = 1$ のとき．$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqq \frac{3}{4}$　∴ $x^2 + x + 1 \geqq a_1$ となり

$n = 1$ のときは成り立つ．

(ii) $n = k$ のとき．成り立つと仮定すると．$x^{2k} + x^{2k-1} + \cdots + x^2 + x + 1 \geqq a_k$

両辺に．x^2 をかけて．($x^2 \geqq 0$)

$x^{2k+2} + x^{2k+1} + \cdots + x^2 \geqq a_k x^2$

両辺に $x + 1$ を加えて

$$\begin{aligned} x^{2k+2} + x^{2k+1} + \cdots + x^2 + x + 1 &\geqq a_k x^2 + x + 1 \\ &\geqq a_{k+1} \end{aligned}$$

(3) より

∴ $n = k + 1$ のときも成り立つ

(i), (ii) より，すべての正の整数 n，すべての実数 x に対して．

与えられた不等式が成り立つ ■