



2014年 第5問

5 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問に答えよ。

- (1) a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 を求めよ。また、それより一般項 a_n を推定せよ。
- (2) 数学的帰納法により、(1)の一般項の推定が正しいことを証明せよ。
- (3) n を正の整数とする。すべての実数 x に対して、不等式

$$a_n x^2 + x + 1 \geq a_{n+1}$$

が成り立つことを示せ。

- (4) n を正の整数とする。すべての実数 x に対して、不等式

$$x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \dots + x^2 + x + 1 \geq a_n$$

が成り立つことを示せ。