

2013年 第2問

2 放物線  $C: y = x^2$  上に2点  $A(a, a^2)$ ,  $B(b, b^2)$  がある。ただし,  $a < b$  とする。放物線  $C$  と線分  $AB$  が囲む部分の面積を  $S$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $S = \frac{(b-a)^3}{6}$  であることを示せ。
- (2) 2点  $A, B$  を固定する。放物線  $C$  上の点  $P(t, t^2)$  に対して, 放物線  $C$  と線分  $AP$  が囲む部分の面積を  $S_1$ , 放物線  $C$  と線分  $BP$  が囲む部分の面積を  $S_2$  とする。  $a < t < b$  のとき,  $S_1 + S_2$  の最小値を求めよ。
- (3) 常に  $S = \frac{9}{2}$  であるように, 2点  $A, B$  が放物線  $C$  上を動く。このとき, 線分  $AB$  の中点の軌跡の方程式を求めよ。