0001695544038999

岡山県立大学

2014年第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と単位行列 E，零行列 O に対して，等式

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

が成り立つことを示せ．

(2) 行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 & 2 \end{pmatrix}$ と自然数 n に対して，

$$B+2B^2+3B^3+\cdots+nB^n=b_nB$$

を満たす実数 b_n を求めよ．

$\frac{1}{2}n\cdot 3^n - \frac{3^n-1}{4}$

$\frac{n}{2}\cdot 3^n - \frac{1}{4}\cdot 3^n + \frac{1}{4}$

(1) $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$ より．

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=O \quad ■$$

(2) (1)より．$B^2-3B=O$ $\cdots$①

両辺 B を右からかけた

$$B+2B^2+3B^3+\cdots+nB^n=b_nB$$

$$-)\quad B^2+2B^3+\cdots+(n-1)B^n+nB^{n+1}=b_nB^2$$

$$\therefore\ B+B^2+B^3+\cdots+B^n-nB^{n+1}=b_nB-b_nB^2$$

$\therefore$ ①より．$B+3B+9B+\cdots+3^{n-1}B-n\cdot 3^nB=b_nB-b_n\cdot 3B$

$$\therefore\ \frac{1-3^n}{1-3}\cdot B-n\cdot 3^nB=-2b_nB$$

$$\therefore\ \left(\frac{3^n-1}{2}-n\cdot 3^n+2b_n\right)B=O$$

$$\therefore\ b_n=\underline{\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot 3^n+\frac{1}{4}}\ /\!/$$