岡山県立大学

2013年第1問

数理 石井K

1 a, bをいずれも正の数とする．次の問いに答えよ．

(1) xを正の数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$a^{x+1}+b^{x+1} \geqq ab^x + a^x b$$

(2) nを自然数とするとき，次の不等式を証明せよ．

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leqq \frac{a^n+b^n}{2}$$

(3) $a+b\sqrt{2}=4$のとき，a^4+4b^4の最小値を求めよ．

(1) (左辺) − (右辺)

$= a^{x+1} - a^x b + b^{x+1} - ab^x$

$= a^x(a-b) - b^x(a-b)$

$= (a-b)(a^x - b^x)$

(i) $a \geqq b$ のとき. $a^x \geqq b^x$ なので

(左辺) − (右辺) $\geqq 0$

(ii) $a < b$ のとき

$a^x < b^x$ なので

$a-b<0$, $a^x - b^x < 0$

$\therefore$ (左辺) − (右辺) $\geqq 0$

(i), (ii)より. 不等式が成り立つ ■

(2) 数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき.

$\frac{a+b}{2} \leqq \frac{a+b}{2}$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leqq \frac{a^k+b^k}{2}$$

両辺に $\frac{a+b}{2}$ (>0) をかけると.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \leqq \frac{a^k+b^k}{2}\cdot\frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{a^{k+1}+b^{k+1}+\underline{a^k b + ab^k}}{4}$$

$$\leqq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}+a^{k+1}+b^{k+1}}{4} \quad (\because (1)より)$$

$$= \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$$

$\therefore$ $n=k+1$ のときも成り立つ (等号成立は $a=b$ のとき)

(i), (ii)より 自然数 n について成り立つ ■

(3) (2)より. $n=4$ のとき.を考えて. $s^4+t^4 \geqq 2\cdot\left(\frac{s+t}{2}\right)^4$ (s, tは正) が成り立つ

$s=a$, $t=\sqrt{2}b$ を代入すると. $a^4+4b^4 \geqq 2\cdot\left(\frac{a+\sqrt{2}b}{2}\right)^4 = 2^5$

$\therefore$ a^4+4b^4 の最小値は $\underline{32}$ // 等号成立は $a=\sqrt{2}b$ すなわち $a=2$, $b=\sqrt{2}$ のとき