2015年 第3問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=(1-x)e^{2x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=1-x$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線を $\ell$ とする．曲線 $y=f(x)$ と直線 $\ell$ との交点は $(0,\ 1)$ のみであることを示せ．

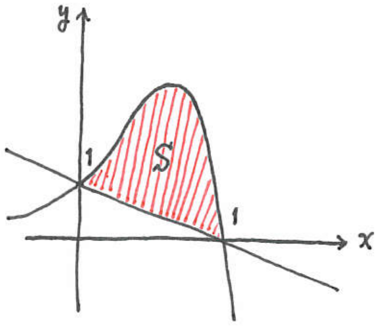
(1) $f'(x)=-e^{2x}+2(1-x)e^{2x}$

$=(1-2x)e^{2x}$

$\therefore f'(x)=0$ となるのは，$x=\frac{1}{2}$

| $x$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{e}{2}$ | $\searrow$ |

右の増減表より，最大値は $\frac{e}{2}$ $\left(x=\frac{1}{2}\text{ のとき}\right)$ //




(2) $(1-x)e^{2x}-(1-x)=0$ より

$(1-x)(e^{2x}-1)=0$

$\therefore$ 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=1-x$ の交点の $x$ 座標は，

$x=0,\ 1$

$S=\int_0^1 (1-x)e^{2x}-(1-x)\,dx$

$=\int_0^1 e^{2x}+x-1\,dx-\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$

$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1-\left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^2+\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$

$=\frac{e^2-5}{4}$ //

(3) $f'(0)=1$ より，$\ell:\ y=x+1$

$g(x)=(1-x)e^{2x}-(x+1)$ とおくと

$g'(x)=(1-2x)e^{2x}-1$

$g''(x)=-4xe^{2x}$

2枚目につづく

2015年第3問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = (1-x)e^{2x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 1 - x$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線を $\ell$ とする．曲線 $y = f(x)$ と直線 $\ell$ との交点は $(0,\ 1)$ のみであることを示せ．

(3) のつづき

右の増減表より

$g'(x) \leqq 0$

$\therefore$ $g(x)$ は単調減少で $g(0) = 0$ なので

$x = 0$ は $g(x) = 0$ のただ1つの解となる．

すなわち，$y = f(x)$ と $\ell$ の交点は $(0, 1)$ のみである ▨

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g'(x)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ |