0002046723597999

立教大学

2014年 理学部（個別日程）第1問　1枚目/2枚

数理 石井K

1 次の空欄 ア 〜 コ に当てはまる数または式を記入せよ．

(1) 1でない実数aに対し，$f(x)=x^3+ax^2+x+1$，$g(x)=x^3+x^2+x+a$とする．方程式$f(x)=0$と$g(x)=0$がただ1つの共通解をもつならば，$a=$ ア（-3）であり，$f(x)=0$のすべての解は イ（$1,\ 1\pm\sqrt{2}$）である．

(2) $x>0$のとき，$f(x)=e^{-\sqrt{3}x}\sin x$の最大値は ウ（$\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}$）であり，最小値は エ（$-\frac{1}{2}e^{-\frac{7\sqrt{3}}{6}\pi}$）である．

(3) $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$とするとき，$z^{2014}=$ オ（$-\frac{1}{2}$）＋ カ（$-\frac{\sqrt{3}}{2}$）iである．ただし，iは虚数単位とする．

(4) a，bを2から9までの自然数とするとき，a，bの組$(a,\ b)$は64通りあるが，そのうち$\log_a b$が整数となるのは キ（11）通りであり，整数でない有理数となるのは ク（5）通りである．

(5) ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$は，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$かつ$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{3}$を満たす．このとき，ベクトル$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$が$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{5}{3}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-3$を満たすならば，$p=$ ケ（3），$q=$ コ（-4）である．ただし，p，qは実数とする．

(1) 共通解をαとおくと．

$\alpha^3+a\alpha^2+\alpha+1=0$ …①

$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+a=0$ …②

①−②より．$(a-1)(\alpha+1)(\alpha-1)=0$

(i) $a=1$のとき．

$f(x)=g(x)$となるので共通解を2つもち不適

(ii) $\alpha=-1$のとき．

①より．$-1+a-1+1=0$　∴ $a=1$となり

(i)より不適．

(iii) $\alpha=1$のとき．

①より．$1+a+1+1=0$　∴ $a=-3$

このとき．$f(x)=(x-1)(x^2-2x-1)$

$g(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$

∴ 共通解は1つのみ

(i)〜(iii)より．

$a=-3$，$f(x)=0$のすべての解は．$x=1,\ 1\pm\sqrt{2}$ //

(2)

$f'(x)=-\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x}\sin x+e^{-\sqrt{3}x}\cos x$

$=-e^{-\sqrt{3}x}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)$

$=-2e^{-\sqrt{3}x}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$e^{-\sqrt{3}x}$は単調減少の関数なので

$0<x\leqq 2\pi$の範囲で考えればよい

x	(0)	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{7}{6}\pi$	…	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	(0)	↗		↘		↗	0

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}>0$

$f\left(\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{7\sqrt{3}}{6}\pi}<0$

∴ 最大値 $\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}$ //

最小値 $-\frac{1}{2}e^{-\frac{7\sqrt{3}}{6}\pi}$ //

(3) $z^{2014}=(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)^{2014}=\cos(60^\circ\times 2014)+i\sin(60^\circ\times 2014)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ //

0002046723597999

立教大学

2014年 理学部（個別日程） 第1問　　2枚目／2枚

数理 石井K

1 次の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまる数または式を記入せよ．

(1) 1でない実数 a に対し，$f(x)=x^3+ax^2+x+1$，$g(x)=x^3+x^2+x+a$ とする．方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ がただ1つの共通解をもつならば，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，$f(x)=0$ のすべての解は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $x>0$ のとき，$f(x)=e^{-\sqrt{3}x}\sin x$ の最大値は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とするとき，$z^{2014}=$ $\boxed{\text{オ}}$ $+$ $\boxed{\text{カ}}$ i である．ただし，i は虚数単位とする．

(4) a，b を2から9までの自然数とするとき，a，b の組 $(a,\ b)$ は64通りあるが，そのうち $\log_a b$ が整数となるのは $\boxed{\text{キ}}$ 通りであり，整数でない有理数となるのは $\boxed{\text{ク}}$ 通りである．

(5) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ かつ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{3}$ を満たす．このとき，ベクトル $\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ が $\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{5}{3}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-3$ を満たすならば，$p=$ $\boxed{\text{ケ}}$，$q=$ $\boxed{\text{コ}}$ である．ただし，p，q は実数とする．

(4) 整数となるのは．$(a,b)=(2,2),(2,4),(2,8),(3,3),(3,9),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9)$ の $\underline{11\text{通り}}$ //

整数でない有理数となるのは．$(a,b)=(4,2),(8,2),(9,3),(4,8),(8,4)$ の $\underline{5\text{通り}}$ //

(5) $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=p+\frac{1}{3}q=\frac{5}{3}$

$\therefore\ 3p+q=5 \cdots ①$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=p\vec{a}\cdot\vec{b}+q|\vec{b}|^2=\frac{1}{3}p+q=-3 \cdots ②$

①−②より．

$\frac{8}{3}p=8 \qquad \therefore\ \underline{p=3,\ q=-4}$ //