0001858181418999

和歌山大学

2014 年 第 4 問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 箱の中に，1 から 4 までの整数が 1 つずつ重複せずに書かれた 4 枚のカードが入っている．この箱から 2 枚のカードを同時に取り出し，書かれた整数のうち，小さい方を a，大きい方を b とする．また，放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を ℓ とし，ℓ に平行で点 $(b,\ b^2)$ を通る直線を m とする．さらに，放物線 C と直線 m で囲まれた部分の面積を S とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直線 m の方程式を a，b を用いて表せ．

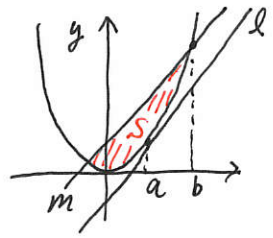
(2) S を a，b を用いて表せ．

(3) S の期待値を求めよ．

(1) $y' = 2x$ より $\ell: y = 2a(x-a) + a^2$ $\quad \therefore \ell: y = 2ax - a^2$

$m: y = 2ax + t$ とおくと．(b, b^2) を通るので，$b^2 = 2ab + t$ $\quad \therefore t = b^2 - 2ab$

$\therefore m: \underline{y = 2ax + b^2 - 2ab}$ //



(2) $x^2 - 2ax - b^2 + 2ab = 0$

$(x-b)\{x-(2a-b)\} = 0$ $\quad \therefore$ 交点の x 座標は $x = b,\ 2a-b$

$$\therefore S = \int_{2a-b}^{b} 2ax + b^2 - 2ab - x^2\,dx$$

$$= -\int_{2a-b}^{b} (x-b)\{x-(2a-b)\}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\{b-(2a-b)\}^3$$

$$= \underline{\frac{4}{3}(b-a)^3} \ //$$

$(a, b) = (1, 2), (1, 3), (1, 4)$
$(2, 3), (2, 4), (3, 4)$

(3) $(\text{期待値}) = \dfrac{1}{{}_4C_2} \times \dfrac{4}{3} \times \{1^3 + 2^3 + 3^3 + 1^3 + 2^3 + 1^3\}$

$$= \frac{2}{9} \times 46$$

$$= \underline{\frac{92}{9}} \ //$$