2012年 工・情報・環境学部 (A) 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) △ABC において，$\angle A = \dfrac{\pi}{3}$，$\angle B = \dfrac{\pi}{4}$，$AB = 6\sqrt{2}$ のとき，△ABC の外接円の半径を求めよ．

(2) 空間のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ がある．$\vec{a} = (1,\ 2,\ -3)$，$\vec{b} = (0,\ 1,\ -1)$，$|\vec{c}| = 1$，$\vec{a} \perp \vec{c}$，$\vec{b} \perp \vec{c}$ とするとき，$\vec{c}$ を成分で表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ は初項が 8，公差が 14 の等差数列とする．数列 $\{b_n\}$ は公比が正の等比数列とする．$a_1 = 2b_1$ かつ $a_5 = b_5$ とするとき，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $\angle C = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{12}\pi$．　$\therefore \sin\frac{5}{12}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\therefore$ 正弦定理より．

$$\frac{AB}{\sin\frac{5}{12}\pi} = 2R \qquad \therefore R = \frac{6\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \underline{6(\sqrt{3}-1)}\ /\!/$$

(2) $\vec{c} = (x, y, z)$ とおくと，

$|\vec{c}| = 1$ より，$x^2+y^2+z^2 = 1 \cdots ①$

$\vec{a} \perp \vec{c}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{c} = x + 2y - 3z = 0 \cdots ②$

$\vec{b} \perp \vec{c}$ より　$\vec{b}\cdot\vec{c} = y - z = 0 \cdots ③$

③より．$y = z$　②に代入して，$x = z$　これらを①に代入して，

$z^2 = \frac{1}{3}$　　$\therefore z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　$\therefore \underline{\vec{c} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ (複号同順)}\ /\!/$

(3) $a_n = 8 + 14(n-1) = 14n - 6$，$b_n$ の初項を b，公比を $r\ (r > 0)$ とおくと，

$b_n = b\cdot r^{n-1}$

$\therefore a_1 = 2b_1$ より．$8 = 2b$　$\therefore b = 4$

$a_5 = b_5$ より．$64 = 4\cdot r^4$　$\therefore r^4 = 16$　$r > 0$ より　$r = 2$

$\therefore b_n = 4\cdot 2^{n-1}$

$\therefore \underline{b_n = 2^{n+1}}\ /\!/$